Atelier : commentaire du texte de 1946 Remarks before the Princeton Bicentennial Conference on Problems in Mathematics

Si l'importance des travaux de Gödel en logique et en théorie des ensembles est très largement reconnue, l'étude de sa pensée, notamment à travers l'analyse de ces écrits non-publiés ont également révélés un travail conceptuel d'une grande richesse et profondeur philosophique. Certaines de ces déclarations[[1]](#footnote-1) nous amènent à penser qu'articles mathématiques et réflexions sur la nature des objets mathématiques sont profondément liés chez Gödel. Comme pour Einstein, la réflexion conceptuelle qu'il a mené sur les objets de sa discipline a été déterminante pour dans le développement de ses travaux scientifiques[[2]](#footnote-2). Il serait donc erroné de voir dans les travaux philosophiques de Gödel des errements métaphysique indépendants de ces travaux scientifiques. La philosophie réaliste de Gödel est au contraire en prise avec une réalité, à la fois physique et conceptuelle, dont il tente de dégager la structure profonde. Elle vise, entre autres, à isoler des concepts suffisamment clairs et généraux pour êtres à mêmes de servir de fondement rationnel à la pratique mathématique et à ses résultats.

Ainsi il y a quelque chose de l'ordre du vérifiable ou du réfutable dans les positions de Gödel. Si la démarche de Gödel ne peut se réduire à une démarche mathématique, sa quête pour mettre en évidence le fondement rationnel et universel de ce que certains seraient tentés de qualifier d'arbitraire et de subjectif, se doit de rendre compte des résultats et avancées de la pratique mathématique. En effet puisque Gödel cherche à fonder la pratique mathématique sur la base de concepts généraux et anhistoriques, ces concepts doivent pouvoir rendre compte non seulement de l'ensemble des mathématiques développées jusqu'à son époque, mais également des mathématiques développées ensuite. C'est dans l'idée de mettre à l'épreuve la philosophie de Gödel que je m’intéresse tout particulièrement à sa position concernant le problème du continu. En effet l'analyse que mène Gödel du problème du continu est fortement dépendante de ces positions concernant la nature des objets mathématiques.

De manière très brève le problème du continu consiste à savoir combien de points contient une droite. Ou dit autrement il consiste à situer l’ensemble des réels sur l’échelle des ensembles infinis que nous fournit la théorie des ensembles et dont le premier niveau est l’infinie dénombrable des nombres naturels.

Dans un célèbre article de 1947 (What is Cantor’s Continuum problem?) Gödel livre son analyse du problème du continu :

L’hypothèse du continu est vraisemblablement indémontrable dans le cadre de la théorie des ensembles (ZFC), ce que Cohen achèvera de démontrer en 1964 (pour avoir une idée de comment démontrer qu’un énoncé est indémontrable, voir la deuxième section des repères mathématiques). Cependant pour le réaliste mathématique qu’est Gödel, cette indémontrabilité ne signifie pas que l’on ne puisse pas trancher le problème du continu, elle signifie plutôt que les axiomes de la théorie des ensembles (ZFC) n’achèvent pas complètement de décrire la nature et les propriétés des ensembles. De ce point de vue, bien qu’indémontrable, l’hypothèse du continu a un sens et est soit vraie soit fausse dans la réalité conceptuelle où vivent les ensembles. Il faut donc pour un jour pouvoir démontrer ou réfuter l’hypothèse du continu trouver de nouveaux axiomes qui soient justifiés et qui renforceraient la théorie des ensembles au point qu’elle devienne assez forte pour permettre de trancher le problème du continu. L’article de 1947 donne plusieurs débuts de pistes concernant la recherche de nouveaux axiomes, notamment les axiomes de grands cardinaux (voir repères mathématiques) et la question de la définissabilité des ensembles.

Nous proposons dans cet atelier d’analyser un autre texte de Gödel, moins centré sur l’hypothèse du continu et moins connu mais qui, il me semble, permet de mieux saisir le contexte philosophique dans lequel s’inscrivent les pistes donnés par Gödel. Le commentaire du texte de 1946 « Remarks before the Princeton Bicentennial Conference on Problems in Mathematics » tiré des Collected Works Vol II sera ainsi l’occasion de discuter du fondement de deux positionnements Gödeliens concernant la théorie des ensembles qui pourraient entretenir un lien profond avec le problème du continu :

\_Le principe de maximalité qui permet entre autre de justifier le bien fondé des axiomes de grands cardinaux.

\_ L’idée que tout ensemble pourrait être l’extension d’un concept qui le poussent à tenter de comprendre le lien entre les ensembles et leurs éventuelles définitions.

Un des objectifs de ma thèse serait de confronter les positions de Gödel aux nombreux travaux et développements qu’a connu la théorie des ensembles les 40 dernières années.

**Le texte**

Le texte est divisé en 8 paragraphes, mais nous nous concentrerons sur les paragraphes 1,2,3,4 et 6 dont voici un résumé très succinct :

\_Au paragraphe 1, Gödel affirme que le concept de machine de Turing permet de définir de manière absolue le concept de calcul. Il avance également l’idée que ce résultat nous encourage à envisager la possibilité de défini de manière absolue d’autres concepts. Vous trouverez une définition de ce qu’est une machine de Turing dans les repères mathématiques ci-dessous.

\_Au paragraphe 2 Gödel prend l’exemple du concept de démontrabilité et envisage la possibilité que l’on puisse donner une définition absolue de la démontrabilité en s’appuyant sur les grands cardinaux. C’est pourquoi on trouvera une brève introduction au sujet des grands cardinaux dans les repères mathématiques. Pour plus de détail on pourra consulter **[Jech, 2002]** ou **[Koellner, 2011]** .

\_Au paragraphes 3 et 4 Gödel donne un autre exemple de concept qui pourrait être défini de manière absolue : le concept de définissabilité. Il est amené pour cela à envisager différentes caractérisations mathématiques du concept de « définissabilité en terme d’ordinaux ».

\_Au paragraphe 6 Gödel oppose les ensembles définissables aux ensembles formés aléatoirement. Nous questionneront le sens de cette opposition.

**Repères Mathématiques**

**Machine de Turing**

Une machine de Turing est une machine idéale composée :

* d’un ruban de longueur infinie découpé en cases à l’intérieur desquelles peut être écrit un nombre fini de symboles (les entrées). Il n’y a qu’un nombre fini de symboles possible et on peut toujours se ramener à une machine 2 symboles (généralement 0 et 1).
* d’une tête de lecture et écriture qui lorsqu’elle est placée devant un symbole peut le lire, l’effacer ou le remplacer par un autre symbole et ensuite se déplacer d’un symbole vers la droite ou vers la gauche.
* d’un nombre fini d’états dans lesquels peut se trouver la machine
* d’une table de transition qui dicte à la machine, étape par étape, ce que doit faire la tête et dans quel état doit passer la machine en fonction de l’état dans lequel elle est et du symbole lu à l’étape précédente.


Figure 1: Dessin Léon Lenclos

Tout les processus que l’on désigne généralement par le terme de « calcul » peuvent être ramenés à une suite d’opérations exécutés par une machine de Turing. Les machines de Turing mettent en évidence le caractère fini, déterministe et local de tout calcul.

La notion de théorie formelle est liée à la notion de machine de Turing en cela que l’on considère généralement qu’une théorie formelle est une théorie pour laquelle il existe une machine de Turing soit à même de jouer le rôle de vérificateur de preuves. En d’autres termes une théorie formelle est une théorie au sein de laquelle les démonstrations se réduisent à des calculs pouvant être exécutes par des machines de Turing

**Théorie des ensembles et énoncés indémontrables**

Le cadre axiomatique des mathématiques actuelles est la théorie des ensembles, aussi appelée théorie ZFC (Zermelo, Fraenkel et l’axiome du Choix). Cela signifie que l’on peut théoriquement ramener n’importe-quelle démonstration mathématique à une chaîne d’inférences logiques[[3]](#footnote-3) partant des axiomes de ZFC et aboutissant au théorème à démontrer.

Les théorèmes d’incomplétude de Gödel s’appliquent à ZFC, le premier théorème nous apprend notamment qu’il existe nécessairement des énoncés indépendants (ou indémontrables) de ZFC. Un énoncé est indépendant d’une théorie formelle lorsqu’il n’est pas possible de le démontrer ni de démontrer sa négation au sein de la théorie: il n’est ni démontrable ni réfutable. Par conséquent, un énoncé E indémontrable dans une théorie T aura une particularité : on pourra ajouter aux axiomes de T indifféremment l’énoncé E ou bien sa négation non-E sans pour autant risquer de « casser » le système T. Cela signifie que si T était une théorie cohérente et donc n’abritait pas de contradictions, alors il en sera de même pour les théories T+E et T+non-E. Pour démontrer qu’un énoncé E est indémontrable dans une théorie T, on procède souvent de la sorte : on commence par supposer qu’il existe un modèle de T[[4]](#footnote-4) (on suppose donc que T est cohérente), et on construit à partir de ce modèle de T grâce à différentes opérations trop techniques pour les détailler ici un modèle de T+E. Puis l’on fait de même pour construire un modèle de T+-non E à partir d’un autre modèle de T.

**Axiomatique de la théorie des ensembles, axiome de l’infini et grands cardinaux**

La théorie ZFC comporte autour de dix axiomes[[5]](#footnote-5) , nous en présentons quelques-uns ci dessous :

**1** L’axiome de la paire nous dit que l’union de deux ensembles est aussi un ensemble

**2** L’axiome de l’ensemble vide nous dit qu’il existe un ensemble Ø tel qu’aucun ensemble n’appartient à Ø.

**3** L’axiome de l’ensemble des parties nous dit que l’ensemble des parties d’un ensemble est un ensemble

Ex : Si E= {1,2} l’ensemble de ses parties est P(E) = { Ø,{1},{2},{1,2} }

**4** L’axiome de l’infini nous dit qu’il existe un ensemble infini.

On va s’intéresser à l’axiome de l’infini un peu plus en détail plus tard, pour l’instant laissons le de coté et voyons ce que l’on peut faire avec les autres. En réalité nous allons également utiliser les autres axiomes de ZFC de manière implicite, nous perdrons ainsi en rigueur ce que nous gagneront en concision. Nous nous plaçons donc dans ZFC-fin, i.e. ZFC privé de l’axiome de l’infini.

Nous savons que Ø est un ensemble par **2** et donc que P( Ø)= {Ø} est aussi un ensemble par **3**. Adoptons la notation suivante :

0= Ø, 1= {Ø}. L’axiome **1** nous permet de former l’ensemble 2= { {Ø} , Ø } qui est la réunion de 0 et 1. Finalement l’axiome 1 nous permettra pour tout entier n de définir le successeur n+1 de n comme suit : succ(n) = {n, {n}}. A ce stade nous sommes en mesure de construire tous les entiers naturels, c’est à dire que nous pouvons associer à chaque entier un ensemble distinct. L’ensemble des entiers naturels, noté ω, est l’ensemble qui contient Ø et tel que si n appartient à ω alors succ(n) appartient à ω. On dit que ω est clôt pour l’opération successeur. Mais sommes nous surs que ω soit bien un ensemble ? Il s’avère qu’à moins d’introduire l’axiome de l’infini, l’énoncé affirmant qu’il existe un tel ensemble ω est indémontrable dans ZFC-fin.

Ainsi on peut tout à fait interpréter ZFC-fin dans un modèle M1 dans lequel ω n’est pas un ensemble car aucun de nos axiomes ne nous permet d’affirmer que ω est un ensemble. On aura beau faire des combinaisons d’ensembles finis et les répéter un grand nombre de fois, on n’obtiendra toujours que des ensembles finis. Bien sur on peut supposer que ω est un ensemble et construire un modèle M2 de ZFC-fin, on en déduira alors que succ(ω) est aussi un ensemble de M2 et que bien d’autres ensembles infinis existent dans M2. L’axiome de l’infini est donc indémontrable dans ZFC-fin, il est vrai dans certains modèles et faux dans d’autres. Ce que nous montre ce résultat d’indémontrabilité c’est que les axiomes qui nous permettent de créer des ensembles par combinaisons d’autres ensembles ne nous permettent pas de statuer sur l’existence d’ensembles infinis.

De plus il y a une asymétrie entre le fait d’affirmer ou de nier l’axiome de l’infini : en effet la classe de tous les ensembles n’est un ensemble dans aucun modèle, car sinon ce serait l’ensemble de tous les ensembles, ce qui rentre en contradiction avec l’axiome de fondation, un axiome que nous n’avons pas détaillé ici. Or ce qui était l’univers de tous les ensembles dans M1 n’est rien de plus qu’un ensemble dans M2 . Ainsi si on suppose que M2 existe alors M1 existe en tant que restriction de M2. Alors que si on suppose que M1 existe, il n’y a aucun moyen de construire les objets infinis de M2 à partir des ensembles de M1. Affirmer l’existence d’un ensemble infini nous permet en quelque sorte de prendre un certain recul sur les ensembles finis que l’on ne pourrait pas prendre si on évoluait uniquement dans un univers dans lequel tous les ensembles sont finis. Un fait surprenant est que certaines propriétés des ensembles finis dépendent de l’existence d’ensembles infinis.

Les axiomes de grands cardinaux sont très semblables à l’axiome de l’infini, d’ailleurs Gödel les appelle axiome de l’infini dans le texte de 1946. Ils affirment l’existence d’ensembles E tellement grands que leur existence est indémontrable dans ZFC : tous les moyens disponibles pour former des ensembles au sein de ZFC ne suffisent pas à atteindre E.

Il existe un grand nombre de grands cardinaux définis de différentes manières et ce sujet à occupé une place centrale en théorie des ensembles depuis les années 1940. Un dernier fait qu’il faut mentionner c’est que tous les grands cardinaux sont bien ordonnés, i.e. on peut les ranger par taille[[6]](#footnote-6). Ainsi les cardinaux mesurables sont plus grand que les cardinaux inaccessibles car un cardinal mesurable est non seulement un modèle de ZFC mais également un modèle de ZFC+ « Il existe un cardinal inaccessible ». Les axiomes de grands cardinaux sont donc des énoncés indémontrables dans ZFC et qui forment une suite d’extensions de ZFC de plus en plus fortes. Il n’existe donc pas de définition formelle de ce qu’est un axiome de grand cardinal. En effet s’il existait une définition D de ce qu’est un grand cardinal, on pourrait alors tout à fait supposer qu’il existe un ensemble M contenant tous les ensembles vérifiant cette définition. M serait alors un grand cardinal échappant à la définition D.

**Bibliographie**

**[Gödel, 1946]** Gödel (1946). « Remarks before the princeton bicentennial conference on problems in mathematics », extrait de **[Gödel 1990]**

**[Gödel, 1947]** Gödel (1946). « What is Cantor’s Continuum Problem ? », extrait de **[Gödel 1990]**

**[Gödel 1990]** Gödel (1990). « Collected Works, volume II, Publications 1938–1974 », edited by S.

Feferman, J. W. Dawson, Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. N. Solovay and J. van Heijenoort. Oxford University Press, Oxford.

**[Wang 1996]** Wang (1996) « A Logical Journey: From Gödel to Philosophy » The MIT Press

**[Jech, 2002]** Jech (2002). « Set Theory, the Third Millennium edition ». Springer

**[Koellner, 2011]** Koellner. « Independence and Large Cardinals », The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/sum2011/entries/independence-large-cardinals/>.

1. *« My work is an application of a philosophy suggested outside of science and obtained on the occasion of thinking about science. »* Gödel retranscrit par Wang, p 297 de **[Wang 1996]** [↑](#footnote-ref-1)
2. *« Gödel was exceptional in asserting that, and explaining specifically, how his adoption of Platonism in his philosophy of mathematics was fundamental to his mathematical work in logic. »* p14 de **[Wang 1996]** [↑](#footnote-ref-2)
3. Par inférence logique on entends ici une déduction en logique du premier ordre. [↑](#footnote-ref-3)
4. Un modèle est une notion rigoureusement définie en mathématiques. Un modèle correspond grossièrement à la structure nécessaire pour interpréter une théorie axiomatique formelle. Un modèle consiste ainsi en un domaine d'objets U, c'est l'univers du modèle, et en une fonction d'interprétation. La fonction de d'interprétation associe aux symboles du langage de la théorie des objets de U. Un modèle peut ainsi contenir bien plus d'objets que ceux que la théorie qu'il interprète peut exprimer, mais il doit absolument contenir assez d'objet pour interpréter chaque symbole propre du langage de la théorie. Dans un modèle une proposition est soit vraie soit fausse, et ce même si la dite proposition est indémontrable au sein de la théorie. Pour qu'une structure soit un modèle d'une théorie logique, il faut également que les axiomes de la théorie soient des propositions vraies dans le modèle. Par ailleurs supposer qu’une théorie T possède un modèle implique de supposer que T est cohérente, ce qui est généralement indémontrable d’après le second théorème d’incomplétude de Gödel. [↑](#footnote-ref-4)
5. Le nombre d’axiomes peut varier puisqu’il existe plusieurs formulations équivalentes de ZFC. [↑](#footnote-ref-5)
6. En théorie des ensembles c’est la notion de cardinal qui permet d’associer à un ensemble une certaine « taille » [↑](#footnote-ref-6)